**Université Hassan II- Casablanca**
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia
Département de Mathématiques

Année 2015/2016
Parcours: **MIP**
Module: **M136**

## TD corrigé : Fonctions complexes

**Exercice 0.1**

*Déterminerle développement en série de Laurent de la fonction* $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)(3+z)}$

1. *Dans la couronne* $D = \{z \in \mathbb{C} :\ \frac{3}{2} <\mid z \mid< \frac{5}{2}\}$, *autour de* $0$
2. *Dans la couronne* $D = \{z \in \mathbb{C} :\ 0 <\mid z+1 \mid< 1\}$, *autour de* $0$ *et* $-1$.

**Solution 0.1**

1. *Le développement en série de Laurent de la fonction* $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)(3+z)}$.

   *On a pour tout* $z \in \mathbb{C}\backslash\{-3,-1\}$ $f(z) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{1+z} - \dfrac{1}{3+z}\Big)$.
   *La fonction* $f$ *est holomorphe dans* $D$ *et sur sa frontière, car les singularités* $-3$ *et* $-1$. *Donc* $f$ *admet un développement en série de Laurent centré à l'origine* $z_0 = 0$.
   *Pour* $\frac{3}{2} <\mid z \mid$ *on a* $\mid \frac{1}{z} \mid< 1$ *et donc*

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z}.\frac{1}{1+1/z} = \frac{1}{z}\sum_{0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^n} = \sum_{1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}.$$

   *Pour* $\mid z \mid< \frac{5}{2}$ *on a* $\mid z \mid< 3$ *et donc* $\mid \frac{z}{3} \mid< 1$ *et donc*

$$\frac{1}{3+z} = \frac{1}{3}.\frac{1}{1+z/3} = \sum_{0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

   *Alors dans la couronne* $D$ *on a*

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)(3+z)} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n} - \sum_{0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}}\Big).$$

2. *Le développement en série de Laurent autour de* $-1$ *de la fonction* $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)(3+z)}$ *dans le disque épointé* $D = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 <| z+1 |< 1\}$. *On a pour tout* $z \in D$

$$\frac{1}{3+z} = \frac{1}{2} . \frac{1}{1+(1+z)/2} = \sum_{0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}.$$

*D'où*

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)(3+z)} = \sum_{0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

**Exercice 0.2**

*Trouver les résidus des fonctions suivantes à leurs pôles.*

1. $f_1(z) = \dfrac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$.
2. $f_2(z) = \dfrac{1}{z(z+2)^3}$.
3. $f_3(z) = \dfrac{z.e^{zt}}{z-3)^2}$.
4. $f_4(z) = \cot(z)$.

**Solution 0.2**

1. *Les pôles de la fonction* $f_1(z) = \dfrac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$ *sont* $2$,$i$, $-i$ *et sont simples. Les résidus sont donc:*
   - $Res(f_1,2) = \lim_{z \to 2} (z-2).f_1(z) = \dfrac{4}{5}$
   - $Res(f_1,i) = \lim_{z \to i} (z-i).f_1(z) = \dfrac{1-2i}{10}$.
   - $Res(f_1,i) = \lim_{z \to -i} (z+i).f_1(z) = \dfrac{1+2i}{10}$.
2. *Les pôles de la fonction* $f_2(z) = \dfrac{1}{z(z+2)^3}$ *sont* $z = 0$ *un pôle simple et* $z = -2$ *un pôle d'ordre* 3. *Donc*
   - $Res(f_2,2) = \lim_{z \to 0} z.f_2(z) = \dfrac{1}{8}$
   - $Res(f_2,i) = \lim_{z \to i} \dfrac{1}{2!} \dfrac{d^2}{dz^2} (z+2)^3.f_2(z) = \lim_{z \to i} \dfrac{1}{2} \dfrac{2}{z^3} = -\dfrac{1}{8}$.
3. *Les pôles de la fonction* $f_2(z) = \dfrac{1}{z(z+2)^3}$ *sont* $z =^0$ *un pôle simple et* $z = -2$ *un pôle d'ordre* 3. *Donc*
   - $Res(f_2,2) = \lim_{z \to 0} z.f_2(z) = \dfrac{1}{8}$
   - $Res(f_2,i) = \lim_{z \to i} \dfrac{1}{2!} \dfrac{d^2}{dz^2} (z+2)^3.f_2(z) = \lim_{z \to i} \dfrac{1}{2} \dfrac{2}{z^3} = -\dfrac{1}{8}$.
   - $Res(f,i) = \lim_{z \to -i} (z+i).f(z) = \dfrac{1+2i}{10}$.

4. *Le pôle de la fonction* $f_3(z) = \dfrac{z.e^{zt}}{z-3)^2}$ *est* $z = 3$ *c'est un pôle d'ordre* 3*. Donc*

$$Res(f_3,3) = \lim_{z\to 3}(z-3).f_3(z) = \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}(z-3)^3.f_3(z) = \lim_{z\to 3}\left(e^{zt} + zte^{zt}\right) = e^{3t} + 3te^{3t}.$$

5. *Les pôles de la fonction* $f_4(z) = \cot(z)$ *sont* $z = k\pi$*, ils sont simples. Donc*

$$Res(f_4,3) = \lim_{z\to k\pi}(z-k\pi).f_4(z) = \lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)}{\sin(z)}.\lim_{z\to k\pi}\cos(z) = (-1)^{2k} = 1$$

*car* $\dfrac{(z-k\pi)}{\sin(z)} = (-1)^k\dfrac{(z-k\pi)}{\sin(z-k\pi)}$ *et* $\cos(k\pi) = (-1)^k$

**<u>Exercice</u> 0.3**

*Trouver les résidus des fonctions suivantes à leurs pôles.*

1. $f_1(z) = \dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$.
2. $f_2(z) = \dfrac{e^z}{\sin^2(z)}$.

**<u>Solution</u> 0.3**

1. *La fonction*$f_1$ *possède un pôle double en* $z = -1$ *et deux pôles simples en* $z = -2i$ *et* $z = 2i$*.*

   (a) *Le résidu en* $z = -1$ *est*

$$\begin{aligned} Res(f_1,-1) &= \lim_{z\to -1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\Big[(z+1)^2.f_1(z)\Big] \\ &= \lim_{z\to -1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\Big[\frac{(z^2-2z)(z^2+4)-2z(z^2-2z)}{(z^2+4)^2}\Big] \\ &= -\tfrac{14}{25} \end{aligned}$$

   (b) *Le résidu en* $z = 2i$ *est*

$$\begin{aligned} Res(f_1,2i) &= \lim_{z\to 2i}\Big[(z-2i).f_1(z)\Big] = \lim_{z\to 2i}\Big[(z-2i).\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2-2i)(z^2+2i)}\Big] \\ &= -\frac{-4-4i}{4i(2i+1)^2} \\ &= \frac{7+i}{25} \end{aligned}$$

   (c) *Le résidu en* $z = -2i$ *est*

$$\begin{aligned} Res(f_1,-2i) &= \lim_{z\to 2i}\Big[(z+2i).f_1(z)\Big] = \lim_{z\to 2i}\Big[(z+2i).\frac{z^2-2z}{(z^2-2i)(z^2+2i)}\Big] \\ &= -\frac{-4+4i}{-4i(-2i+1)^2} \\ &= \frac{7-i}{25} \end{aligned}$$

2. 
3. **La fonction**$f_2$ **possède des pôles double en** $z = k\pi$ **où** $k \in \mathbb{Z}$

(a) ***Première méthode.*** *Le résidu de* $f_2$ *en* $z = k\pi$ *est*

$$\begin{aligned}
Res(f_2, -1) &= \lim_{z\to -1} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\Big[(z-k\pi)^2.f_1(z)\Big] \\
&= \lim_{z\to k\pi} \frac{e^z\Big[(z-k\pi)^2\sin(z) + 2\sin(z)(z-k\pi) - 2(z-k\pi)^2\cos(z)\Big]}{\sin^3(u)}
\end{aligned}$$

*On posant* $u = z - k\pi$ *la limite peut être écrite sous la forme*

$$\begin{aligned}
Res(f_{12}, -1) &= \lim_{u\to 0} e^{u+k\pi}\Big[\frac{u^2\sin(u) + 2u\sin(u) - 2u^2\cos(u)}{\sin^3(u)}\Big] \\
&= e^{k\pi}\Big\{\lim_{u\to 0}\frac{u^2\sin(u) + 2u\sin(u) - 2u^2\cos(u)}{\sin(z)^3}\Big\} \\
&= e^{k\pi}\lim_{u\to 0}\Big\{\frac{u^2\sin(u) + 2u\sin(u) - 2u^2\cos(u)}{u^3}.\frac{u^3}{\sin(u)^3}\Big\} \\
&= e^{k\pi}\lim_{u\to 0}\Big\{\frac{u^2\sin(u) + 2u\sin(u) - 2u^2\cos(u)}{u^3}.\Big\}
\end{aligned}$$

*car* $e^{k\pi}\lim_{u\to 0}\frac{u^3}{\sin(u)^3} = 1.$

*En utilisant plusieurs fois la règle de L'Hôpital on obtient*

$$Res(f_{12}, k\pi) = e^{k\pi}$$

(b) ***deuxième méthode.*** *On peut utiliser le développement en séries de Laurent. En effet en posant* $u = z - k\pi$ *on aura*

$$e^z = e^u.e^{k\pi} = e^{k\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$$

*et*

$$\sin(u) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

*donc*

$$\frac{e^z}{\sin^2(z)} = e^{k\pi}\Big(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{5}{6} + \frac{u}{3} + ...\Big)$$

.

*Le résidu est le coefficient de* $\frac{1}{z-k\pi} = \frac{1}{u}$ *c'est donc* $e^{k\pi}$.

**Exercice 0.4**

*Calculer les intégrales suivantes.*

1. $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}dz$, *où* $\mathcal{C}$ *est la courbe férmée déinie par*

   (a) $|z| = \frac{3}{2}$ | (b) $|z| = 10$

2. $\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z(z+2)^3}dz$, *où* $\mathcal{C}$ *est la courbe férmée déinie par*

   (a) $|z| = 1$ | (b) $|z| = 3$

3. $\int_{\mathcal{C}} \frac{z.e^{zt}}{z-3)^2}dz$, *où* $\mathcal{C}$ *est la courbe férmée déinie par* $|z| = 4$

**Solution 0.4**

*On rappelle le théorème des résidus:*

**Théorème 0.0.1**

*Soit $f$ une fonction analytique à l'intérieur et à la frontière d'une courbe fermée $\mathcal{C}$ sauf en un nombre $n$ fini de points $a_k$, $k = 1,2,...,n$. L'intégrale complexe de $f$ sur la courbe $\mathcal{C}$ est*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2i\pi. \sum_{k=1}^{k=n} Res(f,a_k)$$

1. *Les pôles de la fonction* $f_1(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$ *sont* $2,i, -i$ *et sont simples. Les résidus sont :*
$$Res(f_1,2) = \frac{4}{5},\ Res(f_1,i) = \frac{1-2i}{10},\ Res(f_1,-i) = \frac{1+2i}{10}.$$
   (a) *Seuls les points* $\frac{1-2i}{10}$ *et* $\frac{1+2i}{10}$ *sont à l'intérieur de la courbe définie par* $\mathcal{C}:\quad |z| = \frac{3}{2}$. *Donc*
$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2i\pi.\Big(\frac{1-2i}{10} + \frac{1+2i}{10}\Big) = \frac{2i\pi}{5}$$
   (b) *Pour la courbe* $\mathcal{C}:\quad |z| = 10$, *les trois points sont à l'intérieur, donc*
$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2i\pi.\Big(\frac{4}{5} + \frac{1-2i}{10} + \frac{1+2i}{10}\Big) = 2i\pi$$

2. *Les pôles de la fonction* $f_2(z) = \frac{z}{z(z+2)^2}$ *sont* $z = 0$ *et* $z = -2$ *et les résidus en ces points sont*
$$Res(f_2,0) = \frac{1}{8}\ \text{ et } Res(f_2,-2) = -\frac{1}{8}.$$
   *où* $\mathcal{C}$ *est la courbe férmée déinie par*

   (a) *Pour la courbe* $\mathcal{C}:\ |z| = 1$, *le seul point à l'intérieur est* 0 *et donc*

$$\int_{\mathcal{C}} f_2(z)dz = 2i\pi.\frac{1}{8} = \frac{i\pi}{4}$$

(b) *Pour la courbe* $\mathcal{C}: \ |z| = 3$*, les deux points sont à l'intérieur donc*

$$\int_{\mathcal{C}} f_2(z)dz = 2i\pi.\Big(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\Big) = 0$$

3. *Le pôle de la fonction* $f_3(z) = \dfrac{z.e^{zt}}{z-3)^2}$ *est* $z = 3$ *c'est un pôle d'ordre* $3$ *et son résidu en ce poit est*

$$Res(f_3,3) = e^{3t} + 3te^{3t}.$$

*Donc Pour la courbe* $\mathcal{C}: \ |z| = 4$

$$\int_{\mathcal{C}} f_3(z)dz = 2i\pi.e^{3t} + 3te^{3t}$$

*car le point est à l'intérieur de la courbe.*

**Exercice 0.5**

*On note* $\mathcal{C}$ *le cercle unité et soit* $f$ *une fonction holomorphe dans un ouvert* $U$ *contenant le disque* $\overline{D(0,1)}$.

1. *Exprimer en fonction des valeurs de* $f$ *et* $f'$, $I = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \Big(2 + z + \frac{1}{z}\Big)\frac{f(z)}{z}dz.$
2. *En déduire la valeur de* $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2(t/2)dt.$

**Solution 0.5**

1. *On a, d'après les formules de Cauchy,*

$$I = 2\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z} + \int_{\mathcal{C}} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z^2}dz = 2i\pi(2f(0) + 0 + f'(0)).$$

2. *D'autre part, on paramètre le cercle unité par l'application* $t \to e^{it}$*. On trouve*

$$I = \int_0^{2\pi} (2 + e^{it} + e^{-it})if(e^{it})dt = 4i.\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2(t/2)dt.$$

*On en déduit*

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2(t/2)dt = \frac{\pi}{2}(2.f(0) + f'(0))$$

**Exercice 0.6**
*Soit $\Gamma_R$ le contour défini par le segment $[-R,R]$ et le demi-cercle située dans le demi-plan supérieur de diamètre le segment $[-R,R]$, avec $R > 1$.*

1. *Calculer $I_R = \displaystyle\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz$ .*
2. *En déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} = \frac{\pi}{e}$.*

**Solution 0.6**

1. *On a $\dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{2i}\Big(\dfrac{1}{z-i} - \dfrac{1}{z+i}\Big)$.*
   *D'après la formule de Cauchy,on a*
   $$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}I_R &= \frac{1}{2i\pi}\Big(\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z-i}dz - \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z+i}dz\Big)\\ &= e^{-1}ind_{\Gamma_R}(i) - e.Ind_{\Gamma_R}(-i)\\ &= e^{-1}\times 1 - e\times 0 = e^{-1}.\end{aligned}$$
   *On a donc $I_R = \dfrac{\pi}{e}$.*
   ***Autre méthod.*** *Soit $g_1$ et $g_2$ les fonctions définies par: $g_1(z) = \dfrac{e^{iz}}{z-i}$ et $g_2(z) = \dfrac{e^{iz}}{z+i}$.*
   *D'après la formule intégrale de Cauchy, on a:*
   $$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z-i}dz = 2i\pi.g_1(i)) = 2i\pi.e^{-1} \text{ et } \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z+i}dz = 0.$$
   *La deuxième intégrale est nulle car la fonction est holomorphe sur le demi-disque supérieur dont la frontière est la courbe d'intégration.*
2. *On décompose $\Gamma_R$ en le segment $[-R,R]$ et le demi-cercle $C_R$. On a*
   $$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)+i\sin(x)}{1+x^2}dx = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx.$$
   *car la seconde intégrale est nulle par imparité. De plus, pour $z \in \gamma_R$, on a $\mathcal{I}m(z) \geq 0$et donc $|e^{iz}| \leq 1$. De plus, pour ces mêmes $z$, on a $|z^2+1| \geq R^2-1$. On en déduit*
   $$\Big|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz\Big| \leq 2\pi.R \times \frac{1}{R^2-1}$$
   *On fait tendre $R$ vers $+\infty$ et on trouve*
   $$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = 0$$
   *Puisque*
   $$I_R = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz + \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx,$$
   *le résultat demandé est immédiat en utilisant la première question et en faisant tendre $R$ vers $+\infty$. Remarquons (et c'est peut-être par là qu'il fallait commencer!) que*
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx$$

*a bien un sens, car la fonction à l'intérieur de l'intégrale est dominée par $1/x2$.*

**Exercice 0.7**
*Montrer que l'intégrale*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)^2} dx$$

*a un sens et calculer sa valeur à l'aide des résidus.(considérer la fonction $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$)*

**Solution 0.7**

*l'intégrale proposé a un sens. En effet, la fonction à intégrer est continue sur $]0, +\infty[$, elle est intégrable en $0$ car*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)^2} = 1$$

*et elle est intégrable en $\infty$ car*

$$\frac{\sin(x)}{x(x^2+1)^2} = O\Big(\frac{1}{x^5}\Big)$$

*lorsque $x$ tend vers $+\infty$. Puisque la fonction à intégrer est paire*

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)^2} dx.$$

*Considérons la fonction*

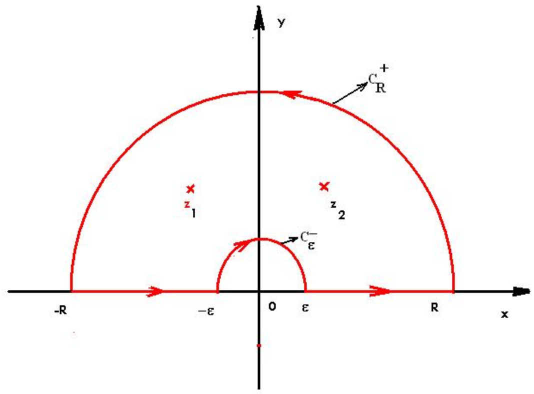
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}.$$

*Elle possède un pôle simple en $z = 0$ et deux pôles doubles en$z = i$et $z = -i$ et elle est holomorphe ailleurs.*

*Soit l'intégrale*

$$J = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)^2} dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)^2} dx + \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2} dz + \int_{C_\epsilon^-} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2} dz.$$

*En intégrant sur le contour pour $R$ suffisamment grand et $\epsilon$ suffisamment petit.*




*le théorème des résidus montre que*

$$J = 2i\pi . Res(f,i)$$

*Comme $z = i$ est un pôle double de $f$ alors*

$$\begin{aligned} Res(f,i) &= \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\Big((z-i)^2 \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}\Big) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\Big(\frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}\Big) \\ &= \lim_{z \to i} \tfrac{d}{dz}\Big(\tfrac{ie^{iz}(z+i)^2 - e^{iz}(z+i)^2 + 2ze^{iz}(z+i)}{z^2(z+i)^4}\Big) = -\frac{3}{4e}. \end{aligned}$$

*D'après le lemme des grandes encoches, on a* $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2} dz = 0.$
*car*

$$\lim_{z \to +\infty} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} = 0$$

*avec* $Re(z) \geq 0$.
*Et d'après le lemme des petites encoches, on aussi*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\epsilon^-} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2} dz = -i\pi.$$

*car*

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} = 1.$$

*En rassemblant ces résultats, on trouve*

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)^2} dx - \pi = 2\pi . \frac{-3}{4e}.$$

*D'où la valeur de l'intégrale cherchée*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}.\Big(1 - \frac{3}{4e})$$